

pour la fonction de transfert du régulateur PID digital et l'on mettra en évidence les relations existantes entre le régulateur PID digital et le régulateur PID continu. Ces relations seront ensuite étendues aux régulateurs standard. Enfin, on montrera les mesures à prendre lorsqu'on doit incorporer une limitation et on mentionnera les problèmes qui se posent à cause de la longueur finie des grandeurs digitales.

9.5.2 Régulateur PID

Pour les régulateurs digitaux, on peut également distinguer les quatre composantes mentionnées au paragraphe 9.2.3. Cependant, l'intégrale est remplacée par une somme, la dérivée par une différence et la deuxième dérivée par une différence de deuxième ordre.

Dans le cas particulier d'un régulateur PID, le signal de sortie à l'instant d'échantillonnage k est donné par la relation

$$y_R[k] = K_p e[k] + K_i \sum_{i=0}^k e[i] + K_d(e[k] - e[k-1]) \quad (9.45)$$

Les coefficients k_p , k_i et k_d du régulateur continu sont remplacés par K_p , K_i et K_d .

Pour établir l'algorithme de réglage du régulateur PID, on doit élaborer la somme de manière récursive. Dans ce but, on introduit une grandeur auxiliaire pour la composante intégrale selon la définition

$$x_R[k] = K_i \sum_{i=0}^{k-1} e[i] \quad (9.46)$$

On obtient ainsi

$$x_R[k+1] = x_R[k] + K_i e[k] \quad (9.47)$$

A l'aide de cette grandeur auxiliaire, la relation (9.45) devient

$$y_R[k] = x_R[k] + K_{pid} e[k] - K_d e[k-1] \quad (9.48)$$

où l'on a posé pour abréger

$$K_{pid} = K_p + K_i + K_d \quad (9.49)$$

9.5.3 Algorithme de réglage du régulateur PID

Sur la base des relations (9.46) et (9.48), on peut établir l'*algorithme de réglage*. Exprimé à l'aide d'un pseudo-langage de programmation (§ 6.9.5), il est représenté à la figure 9.6.

ALGORITHME DE RÉGLAGE PID

```

lire y
e := w - y
y_R := x_R + K_pid e - K_d e_{-1}
sortir y_R
x_R := x_R + K_i e
e_{-1} := e
fin

```

Fig. 9.6 Algorithme de réglage du régulateur PID.

Cet algorithme doit être élaboré à chaque instant d'échantillonnage. Après la lecture de la grandeur à régler y à l'aide d'une entrée analogique, on calcule l'écart de réglage e et la grandeur de sortie y_R . Avec l'instruction "sortir y_R ", le calculateur de processus applique cette nouvelle valeur, soit à l'organe de commande ($y_R = u_{cm}$) par l'intermédiaire d'une sortie analogique, soit au régulateur interne ($y_R = w_a$) par transfert à un autre algorithme de réglage. Ainsi, le temps de calcul pour élaborer la nouvelle valeur de y_R devient minimal. L'incrément de x_R par $K_i e$ et l'échange de e à e_{-1} peuvent se faire dans l'intervalle jusqu'au prochain instant d'échantillonnage. Comme valeurs initiales, lors de l'enclenchement du régulateur digital, on peut poser $x_R := 0$ et $e_{-1} := 0$. À noter que l'instant d'échantillonnage k n'apparaît pas explicitement.

9.5.4 Fonction de transfert pseudo-continu du régulateur PID

La fonction de transfert d'un régulateur digital doit être exprimée par la transformation en z ([3]). Cependant, avec un peu moins de rigueur, on peut l'exprimer aussi par la transformation de Laplace. En introduisant par la suite une simplification, on aboutira à la fonction de transfert d'un régulateur continu équivalent. On parle alors de *fonction de transfert pseudo-continue*.

Dans ce but, on détermine d'abord la transformée de Laplace de la somme

$$f[k] = \sum_{i=0}^k e[i] = f[k-1] + e[k] \quad (9.50)$$

Lorsqu'on tient compte du fait que la valeur à l'instant d'échantillonnage $k-1$ correspond à un retard d'une période d'échantillonnage T_E , on obtient la transformée de Laplace

$$f(s) = f(s) e^{-sT_E} + e(s) \quad (9.51)$$

d'où l'on tire

$$f(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT_E}} e(s) \quad (9.52)$$

On peut approcher la fonction exponentielle par l'*approximation de Padé* du premier ordre

$$e^{-sT_E} \cong \frac{1 - sT_E/2}{1 + sT_E/2} \quad (9.53)$$

Ainsi, on remplace approximativement une fonction transcendante par une fonction rationnelle. Introduit dans (9.52), on obtient

$$f(s) \cong \frac{1 + sT_E/2}{sT_E} e(s) \quad (9.54)$$

De la même manière, on trouve pour la différence

$$d[k] = e[k] - e[k-1] \quad (9.55)$$

la transformée de Laplace

$$d(s) = e(s) - e(s) e^{-sT_E} = (1 - e^{-sT_E}) e(s) \quad (9.56)$$

ou approximativement

$$d(s) \cong \frac{sT_E}{1 + sT_E/2} e(s) \quad (9.57)$$

Lorsqu'on introduit les relations (9.54) et (9.57) dans (9.45), on obtient pour la fonction de transfert l'expression approximative

$$G_R(s) = \frac{y_R(s)}{e(s)} \cong K_p + \frac{1 + sT_E/2}{sT_E} K_i + \frac{sT_E}{1 + sT_E/2} K_d \quad (9.58)$$

En mettant cette relation sous le même dénominateur, on aboutit après quelques transformations élémentaires à

$$G_R(s) \cong \frac{1 + s \frac{K_p + K_i}{K_i} T_E + s^2 \frac{K_d + K_p/2 + K_i/4}{K_i} T_E^2}{s \frac{T_E}{K_i} (1 + sT_E/2)} \quad (9.59)$$

9.5.5 Relations entre le régulateur PID digital et le régulateur PID continu

Lorsqu'on compare l'approximation (9.59) de la fonction de transfert du régulateur PID digital avec l'expression (9.8) du régulateur PID continu, on constate qu'il existe les relations

$$\left. \begin{aligned} T_i &= \frac{T_E}{K_i} \\ T_n + T_v &= \frac{K_p + K_i}{K_i} T_E \\ T_n T_v &= \frac{K_d + K_p/2 + K_i/4}{K_i} T_E^2 \end{aligned} \right\} \quad (9.60)$$

De plus, on doit noter que l'approximation (9.59) introduit une constante de temps $T_E/2$ supplémentaire qui doit être prise en considération comme petite constante de temps lors de l'analyse du circuit de réglage.

Si, par contre, les constantes de temps T_i , T_n et T_v sont données par exemple par le dimensionnement d'un régulateur pseudo-continu comme on le montrera à la section 10.6, on obtient des relations (9.60) les coefficients K_i , K_p et K_d du régulateur digital

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \frac{T_E}{T_i} \\ K_p &= \frac{T_n + T_v - T_E}{T_i} \\ K_d &= \frac{T_n T_v}{T_i T_E} - \frac{2(T_n + T_v) - T_E}{4 T_i} \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

9.5.6 Régulateurs standard

Pour les régulateurs digitaux, on peut également obtenir différents types de régulateurs standard, selon la combinaison des composantes P, I et D. Dans ce cas, on peut aussi réaliser le régulateur PD2 (proportionnel-dérivateur double).

Comme on l'a déjà mentionné, les régulateurs digitaux sont traités en détail dans [3]. Le tableau 9.3 donne un bref résumé en ce qui concerne les relations entre les régulateurs digitaux et les régulateurs continus. Sauf pour le régulateur PD2, ces relations ainsi que les algorithmes de réglage peuvent être déduits facilement à partir des relations établies pour le régulateur PID. Quant au régulateur PD2, il est traité de manière détaillée dans [3], section 7.7.

9.5.7 Régulateur PID avec limitation incorporée

Lorsque le signal de sortie y_R du régulateur digital doit être limité à $y_{R\max}$ ou $y_{R\min}$, l'algorithme de réglage doit être modifié. En plus de la limitation de la sortie, pour éviter des phénomènes transitoires gênants lors de l'intervention des *limitations*, on doit également corriger la composante intégrale.

On montrera dans ce paragraphe les mesures à prendre pour cette correction dans le cas du régulateur PID. Les mêmes mesures doivent aussi être appliquées aux autres régulateurs standard, en particulier aux régulateurs PI et I.

En général, on limite la grandeur auxiliaire $x_R[k]$ à

$$y_{R\max} \geq x_R[k] \geq y_{R\min} \quad (9.62)$$

en analogie aux régulateurs analogiques. Cependant, des études approfondies ont montré que cette mesure simple ne donne souvent pas des résultats satisfaisants. Par conséquent, on présentera une méthode plus efficace [35].

Lorsque la grandeur de sortie $y_R[k]$ est en limitation, le signal de sortie est $y_{R\lim}$ égale à $y_{R\max}$ ou $y_{R\min}$. La composante intégrale x_R n'est plus incrémentée selon la relation (9.47), mais selon

$$x_R[k+1] = x_R[k] + K_i e_{\lim}[k] \quad (9.63)$$

où $e_{\lim}[k]$ est un *écart de réglage fictif*. Ce dernier est déterminé de façon à obtenir une grandeur de sortie fictive égale à $y_{R\lim}$. En posant dans l'équation (9.48) $y_R[k] = y_{R\lim}[k]$ et $e[k] = e_{\lim}[k]$. On obtient

$$e_{\lim}[k] = (y_{R\lim}[k] - x_R[k] + K_d e[k-1]) / K_{pid} \quad (9.64)$$

Pour établir l'algorithme de réglage, il est judicieux de déterminer l'écart de réglage fictif à partir de la différence entre la grandeur de sortie non limitée et limitée. Lorsqu'on désigne la grandeur de sortie non limitée par $y'_R[k]$, on obtient à partir de (9.48)

$$y'_R[k] - y_{R\lim}[k] = K_{pid}(e[k] - e_{\lim}[k]) \quad (9.65)$$

d'où l'on tire

$$e_{\lim}[k] = e[k] - (y'_R[k] - y_{R\lim}[k]) / K_{pid} \quad (9.66)$$

Tableau 9.3 Relations entre les régulateurs digitaux standard et les régulateurs continus.

Régulateur	Approximation pour $G_R(s)$	K_i	K_p	K_d	K_{d2}
P	k_p	—	k_p	—	—
I	$\frac{1+sT_E/2}{sT_i}$	$\frac{T_E}{T_i}$	—	—	—
PI	$\frac{1+sT_n}{sT_i}$	$\frac{T_E}{T_i}$	$\frac{T_n - T_E/2}{T_i}$	—	—
PD	$k_p \frac{1+sT_v}{1+sT_E/2}$	—	k_p	$\frac{T_v - T_E/2}{T_E} k_p$	—
PID	$\frac{(1+sT_n)(1+sT_v)}{sT_i(1+sT_E/2)}$	$\frac{T_E}{T_i}$	$\frac{T_n + T_v - T_E}{T_i}$	$\frac{T_n T_v}{T_i T_E} - \frac{2(T_n + T_v) - T_E}{4 T_i}$	—
PD2	$k_p \frac{(1+sT_v)(1+sT_{v2})}{1+sT_E}$	—	k_p	$\frac{T_v + T_{v2} - T_E}{T_E} k_p$	$\left[\frac{T_v T_{v2}}{T_E^2} - \frac{2(T_v + T_{v2}) - T_E}{4 T_E} \right] k_p$

On peut alors établir le schéma bloc représenté à la figure 9.7, où l'on a fait appel aux relations (9.48), (9.63) et (9.66). Les blocs contenant z^{-1} représentent schématiquement le décalage d'une période d'échantillonnage ([3], § 2.3.3). Lors de l'interprétation de ce schéma bloc, on doit tenir compte du traitement séquentiel selon l'algorithme de réglage (§ 9.5.8).

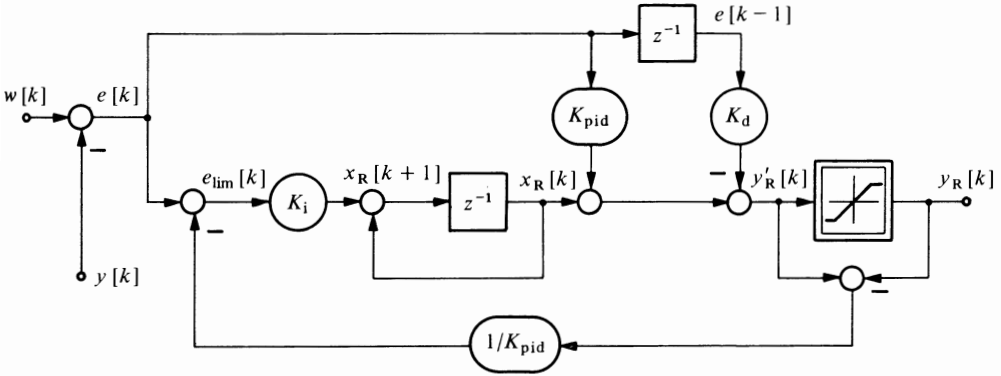


Fig. 9.7 Schéma bloc d'un régulateur PID digital avec limitation et correction de la composante intégrale.

De la figure 9.7, on voit clairement qu'il y a une contre-réaction sur $x_R[k]$ en cas de limitation de la grandeur de sortie. A noter qu'on a $y_R[k] = y'_R[k]$ lorsque la limitation n'est pas atteinte.

9.5.8 Algorithme de réglage du régulateur PID avec limitation incorporée

L'algorithme de réglage, présenté au paragraphe 9.5.3, doit être modifié lorsqu'il est nécessaire d'incorporer une limitation de la grandeur de sortie. Comme on l'a montré au paragraphe précédent, il est alors indispensable de corriger aussi la composante intégrale.

Pour le régulateur PID, l'algorithme de réglage est représenté à la figure 9.8.

ALGORITHME DE RÉGLAGE PID

```

lire y
e := w - y
y'_R := x_R + K_pid e - K_d e_{-1}
si y'_R > y_Rmax
    alors y_R := y_Rmax
sinon si y'_R < y_Rmin
    alors y_R := y_Rmin
    sinon y_R := y'_R
sortir y_R
e_lim := e - (y'_R - y_R) / K_pid
x_R := x_R + K_i e_lim
e_{-1} := e
fin
    
```

Fig. 9.8 Algorithme de réglage d'un régulateur PID avec limitation incorporée.